模块四 综合提升篇（★★★☆）

内容提要

本节归纳几类立体几何综合小题，类型Ⅰ为空间角度的计算方法，较为简单，作为本节的铺垫. 类型Ⅱ、Ⅲ难度较高.

1．线线角的计算：核心是通过平移使其相交，到三角形中来算.

2．线面角的计算：有两种几何的方法.

①作垂线：如图 1，要求直线 PA 与平面 α 所成的角，只需过 P 作 α 的垂线，找到垂足 O，求 $\angle PAO$.

②算距离：如图 2，若不方便过 P 作平面 α 的垂线，也可用等体积法或其它方法求出点 P 到平面 α 的距离 d，再按 $\sin\theta=\dfrac{d}{PA}$ 来求线面角.

3．二面角的计算：核心是作平面角，若与棱垂直的射线好找，则直接作，否则如图 3，可先过 α 内的点 P 作 β 的垂线，找到垂足 A，再过 P 作 l 的垂线 PO，垂足为 O，则由三垂线定理知 $l\perp OA$，所以 $\angle POA$ 即为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，这种找二面角的方法叫做三垂线法，其中 PO 和 OA 的作法可交换.

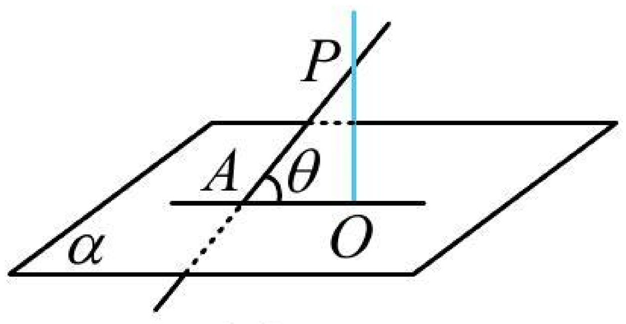


图1

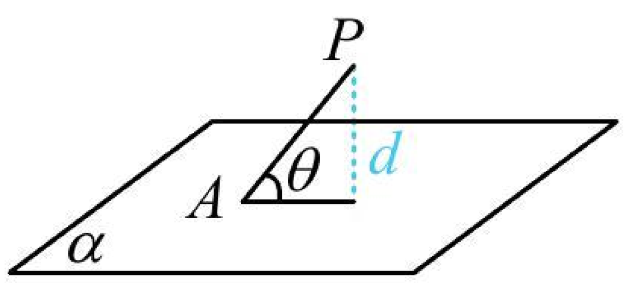


图2

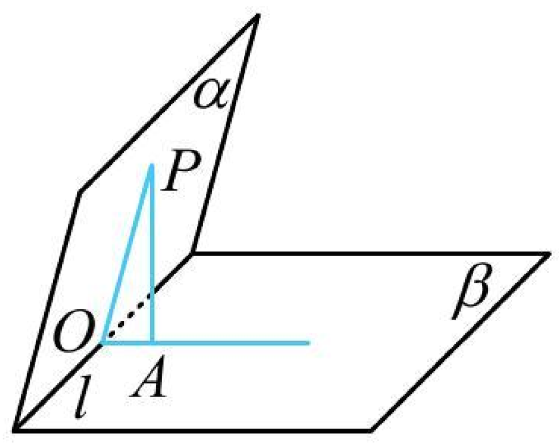


图3

4．翻折问题：解决翻折问题的核心有两点.

①分析翻折前后未发生变化的几何关系，得出翻折后空间图形的几何特征，将问题明朗化.

②在翻折前后的图形中，抓住与折痕线垂直的直线，将空间的计算问题转换到平面上来进行.

5．直线上的动点问题：例如，P 为定直线 AB 上的动点，这类问题除了几何法分析之外，还可考虑建系，借助 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 将动点 P 的坐标表示成 λ，用向量法分析问题.

典型例题

类型Ⅰ：空间角的计算综合小题

【例 1】直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BCA=90^\circ$，M，N 分别是 A_1B_1，A_1C_1 的中点，$BC=CA=CC_1$，则 BM 与 AN 所成角的余弦值为（　　）

（A）$\dfrac{1}{10}$　（B）$\dfrac{2}{5}$　（C）$\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　（D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析： 求异面直线所成角，常考虑平移使共起点，观察发现可将 BM 移到 NQ 处，构造平行四边形，

取 BC 中点 Q，连接 AQ，QN，MN，则 $MN// B_1C_1$ 且 $MN=\dfrac{1}{2}B_1C_1$，又 $QB// B_1C_1$ 且 $QB=\dfrac{1}{2}B_1C_1$，

所以 $MN// QB$ 且 $MN=QB$，故 $MNQB$ 为平行四边形，

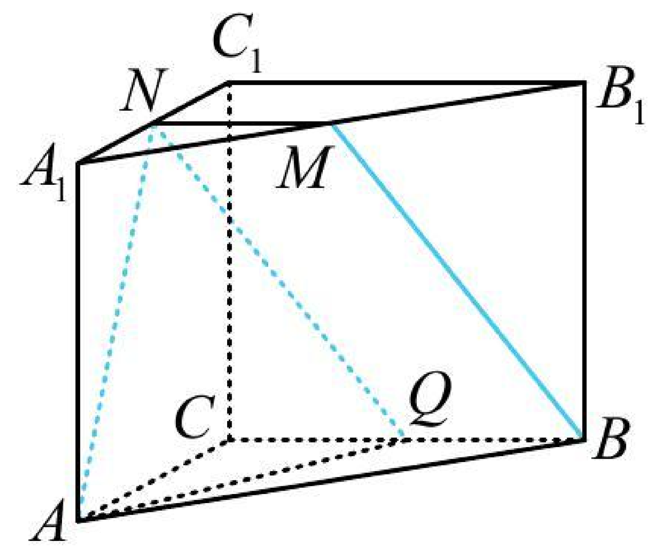
所以 $BM// NQ$，故 $\angle ANQ$ 即为直线 BM 与 AN 所成的角，设 $BC=CA=CC_1=2$，

则 $AN=\sqrt{AA_1^2+A_1N^2}=\sqrt{5}$，$AQ=\sqrt{AC^2+CQ^2}=\sqrt{5}$，

$B_1M=\frac{1}{2}A_1B_1=\frac{1}{2}\sqrt{A_1C_1^2+B_1C_1^2}=\sqrt{2}$， $NQ=BM=\sqrt{BB_1^2+B_1M^2}=\sqrt{6}$，

所以$\cos\angle ANQ=\frac{AN^2+NQ^2-AQ^2}{2AN\cdot NQ}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

答案：C



【反思】求异面直线所成的角，核心是平移为相交直线，常见的平移方法如平行四边形对边平行、三角形中位线平行于底边等.

【例 2】已知三棱锥$S-ABC$中，底面ABC为边长等于 2 的等边三角形，SA垂直于底面ABC， $SA=3$，那么直线AB与平面SBC所成角的正弦值为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　（B）$\frac{\sqrt{5}}{4}$　　（C）$\frac{\sqrt{7}}{4}$　　（D）$\frac{3}{4}$

解法 1：由$SA\perp$面ABC和$AC=AB$可分析出$SC=SB$，故ΔSBC和ΔABC均满足等腰，且共底边BC，这种模型中我们常取公共底边的中点，构造与公共底边垂直的截面来分析，

如图，取BC中点O，连接OS，OA，因为$SA\perp$平面ABC，所以$BC\perp SA$，

又ΔABC是正三角形，所以$BC\perp OA$，故$BC\perp$平面SOA，

作$AD\perp SO$于D，连接BD，则$BC\perp AD$，所以$AD\perp$平面SBC，故$\angle ABD$即为所求线面角，

由题意， $AB=2$， $SA=3$，所以$OA=\sqrt{3}$， $SO=\sqrt{SA^2+OA^2}=2\sqrt{3}$，

由$S_{\Delta SOA}=\frac{1}{2}SA\cdot OA=\frac{1}{2}SO\cdot AD$可得$AD=\frac{SA\cdot OA}{SO}=\frac{3}{2}$，所以$\sin\angle ABD=\frac{AD}{AB}=\frac{3}{4}$.

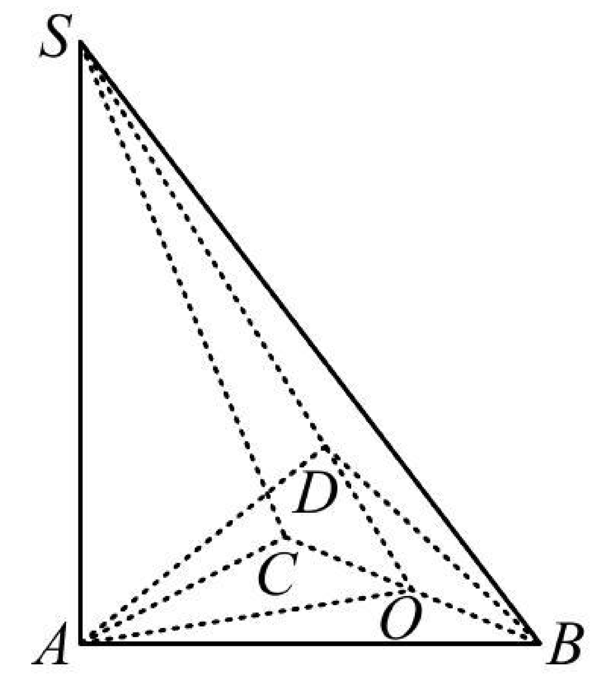
解法 2：注意到$SA\perp$面ABC，所以三棱锥$S-ABC$的体积易求，故也可考虑用等体积法求出A到面SBC的距离d，按$\sin\theta=\frac{d}{AB}$来求线面角的正弦值，

取BC中点O，连接OS，由所给数据可求得$SB=SC=\sqrt{13}$，所以$SO\perp BC$，且$SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=2\sqrt{3}$，

因为$\frac{1}{3}S_{\Delta SBC}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SA$，所以$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3$，解得： $d=\frac{3}{2}$，

故直线AB与平面SBC所成角的正弦值为$\sin\theta=\frac{d}{AB}=\frac{3}{4}$.

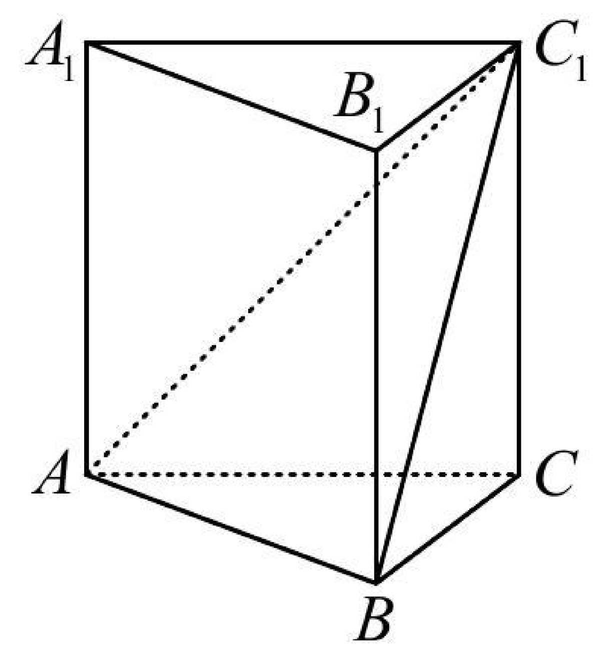
答案：D



【反思】①找线面角的核心是过直线上的点作面的垂线，找到垂足，也就找到了线面角；②若没作出垂线，也可考虑像上面解法 2 那样，通过求点到平面的距离来算线面角.

【例 3】我国古代数学名著《九章算术》中，将底面是直角三角形的直三棱柱称为“堑堵”，在如图所示的“堑堵”中，$AC = CB = CC_1$，则二面角 $C_1 - AB - C$ 的正切值为（　　）

（A）1　（B）2　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（D）$\sqrt{2}$



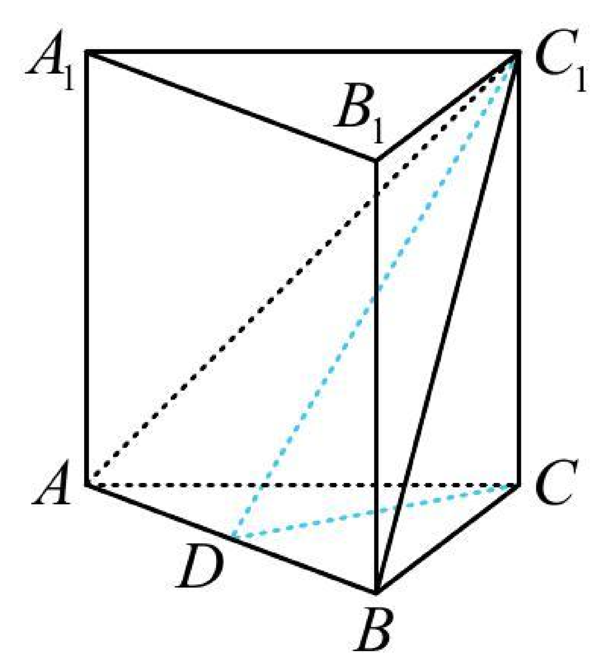
解析：面 ABC 的垂线比较明显，故用三垂线法找二面角，即只需过 C 作二面角棱的垂线即可，

如图，取 AB 中点 D，连接 CD，C_1D，因为 $AC = CB$，所以 $CD \perp AB$，

又 $CC_1 \perp$ 面 ABC，由三垂线定理，$AB \perp C_1D$，所以 $\angle CDC_1$ 即为二面角 $C_1 - AB - C$ 的平面角，

不妨设 $AC = CB = CC_1 = 2$，则 $CD = \sqrt{2}$，所以 $\tan\angle CDC_1 = \dfrac{CC_1}{CD} = \sqrt{2}$.

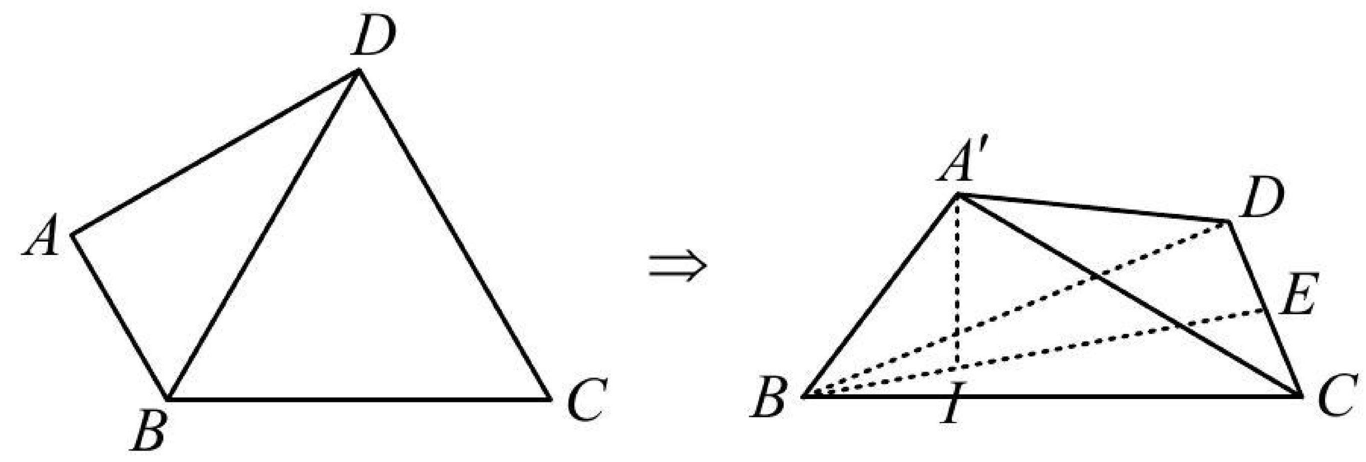
答案：D



【反思】作二面角的平面角常用三垂线法，即只需过一个面内的点向另一个面作垂线，找到垂足，再过垂足作二面角棱的垂线，就能找到二面角的平面角.

类型 II：翻折问题

【例 4】如图，平面四边形 $ABCD$ 中，ΔBCD 是边长为 2 的正三角形，$AB \perp AD$，$AB = 1$，现沿对角线 BD 将 ΔABD 折起到 $\Delta A'BD$，使 A' 在平面 BCD 内的射影 I 落在 ΔBCD 的中线 BE 上，则 $BI =$______.



解析：若直接在 $\Delta A'BI$ 中用勾股定理求 BI，会发现 $A'I$ 不好算，但若将翻折后空间图形中的 I 对应到翻折前的平面图形中去，算 BI 就成了初中问题，

如图 2，作 $A'O\perp BD$ 于 O，$A'I\perp$ 平面 $BCD\Rightarrow BD\perp A'I$，所以 $BD\perp$ 平面 $A'OI$，故 $BD\perp OI$，

注意到翻折前后 ΔBCD 和 $\Delta A'BD$ 内部点线的位置关系未变，故翻折前也应有 $BD\perp AO$，$BD\perp OI$，于是 I，O 在原图中的位置如图 1，接下来的计算可在图 1 中进行，

$AB=1\Rightarrow OB=AB\cdot\cos\angle ABO=AB\cdot\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{1}{2}$，由题意，$\angle OBI=30^\circ$，所以 $BI=\dfrac{OB}{\cos\angle OBI}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

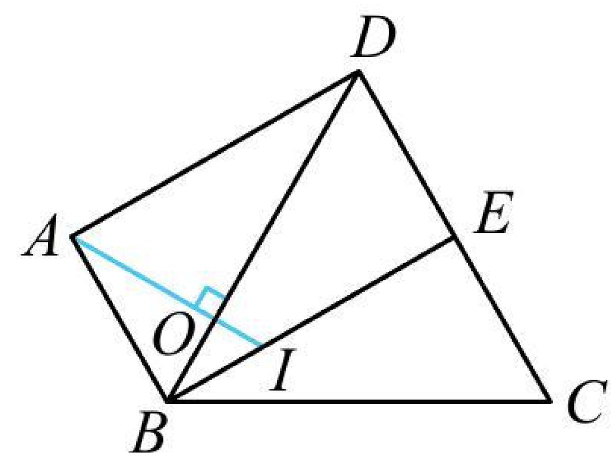


图1

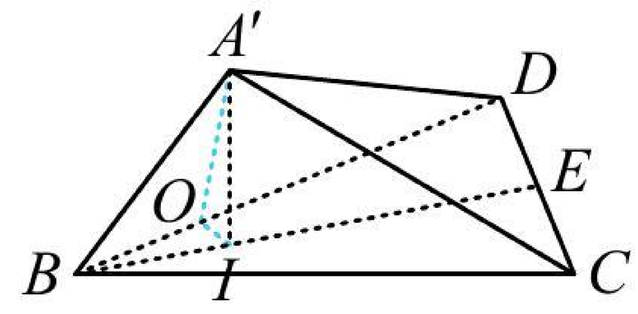
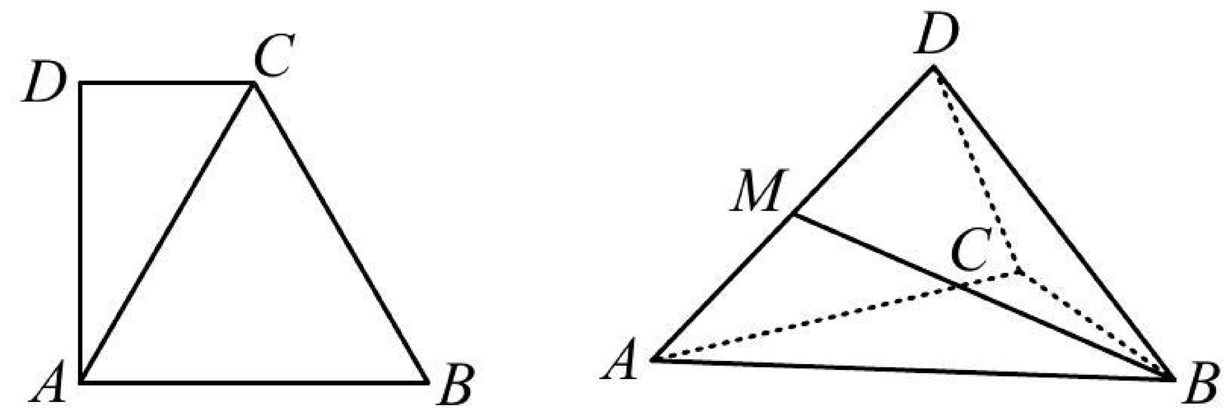


图2

【变式】如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB=BC=2CD=2$，$\angle DAB=90^\circ$，将 ΔACD 沿 AC 折起，使得 $BD=AB$.

（1）证明：平面 $ABC\perp$ 平面 ACD；

（2）若 $BM\perp AD$ 于点 M，求点 M 到平面 BCD 的距离.



解：（1）（折叠前，AB，BC，CD 已知，AD 未知，可过 C 作 AB 的垂线，构造一个矩形来分析）

如图 1，作 $CE\perp AB$ 于 E，因为 $\angle DAB=90^\circ$，所以 $CE//AD$，结合 $AB//CD$ 可得四边形 $AECD$ 是矩形，

所以 $AE=CD=1$，又 $AB=2$，所以 E 是 AB 的中点，故 $AC=BC$，

又 $AB=BC=2$，所以 ΔABC 是边长为 2 的正三角形，故 $CE=\sqrt{3}$，$AD=\sqrt{3}$，

（要证面面垂直，先找线面垂直，可用逆推法，只需在一个面内找与交线垂直的直线，它必垂直于另一个平面，折叠前后 ΔABC 和 ΔACD 的形状未变，而 ΔABC 是正三角形，垂线更好作）

如图，取 AC 中点 F，连接 BF，DF，则 $BF\perp AC$，（要证 $BF\perp$ 面 ACD，还差一条线，观察已知条件可发现约束折叠位置的是 $BD=AB$，长度类条件证垂直，考虑勾股定理）

因为$\angle ADC=90^{\circ}$，所以$DF=\dfrac{1}{2}AC=1$，又$BD=AB=2$，$BF=\sqrt{3}$，所以$DF^2+BF^2=4=BD^2$，

故$BF\perp DF$，结合$BF\perp AC$，且AC，DF是平面ACD内的相交直线可得$BF\perp$平面ACD，

又$BF\subset$平面ABC，所以平面$ABC\perp$平面ACD.

（2）由$BM\perp AD$，$BD=AB$可得M为AD的中点，

（据此可将问题转化为求A到平面BCD的距离，观察发现已有$BF\perp$平面ACD，故用等体积法）

由（1）可得$S_{\Delta ACD}=\dfrac{1}{2}AD\cdot CD=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$BF=\sqrt{3}$，所以$V_{B-ACD}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ACD}\cdot BF=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}$，

如图2，取CD中点G，连接BG，因为$BC=2$，$BD=2$，$CD=1$，所以$BG\perp CD$，

且$CG=\dfrac{1}{2}$，$BG=\sqrt{BC^2-CG^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，所以$S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}CD\cdot BG=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{\sqrt{15}}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

设点A到平面BCD的距离为d，则$V_{A-BCD}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot d=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}d=\dfrac{\sqrt{15}}{12}d$，

因为$V_{A-BCD}=V_{B-ACD}$，所以$\dfrac{\sqrt{15}}{12}d=\dfrac{1}{2}$，解得：$d=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$，

因为M为AD的中点，所以M到平面BCD的距离为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

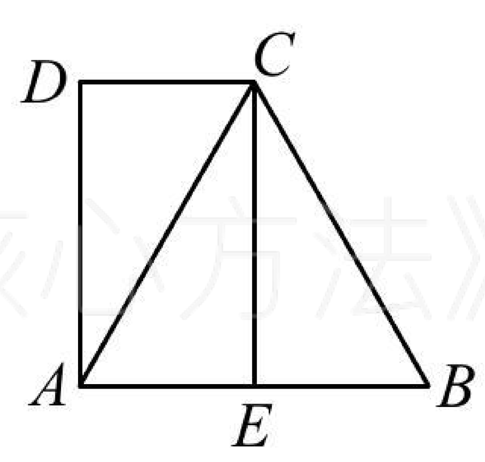


图1

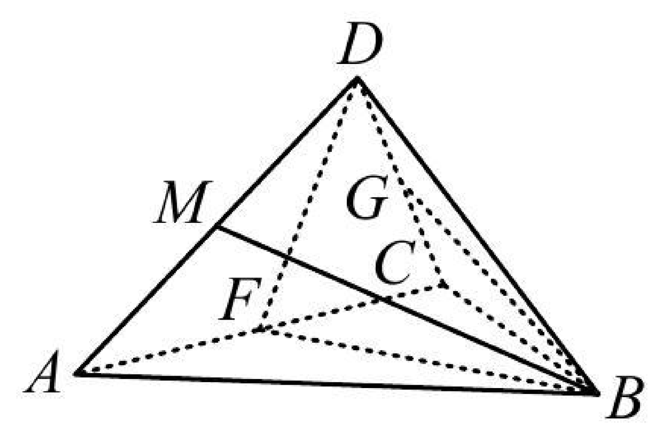


图2

【总结】从上面两道题可以看出，求解翻折问题的核心有两点：①分析翻折前后未发生变化的几何关系；②抓住与折痕线垂直的直线，将空间的计算问题转换到平面上来处理.

类型III：直线上的动点问题处理思路

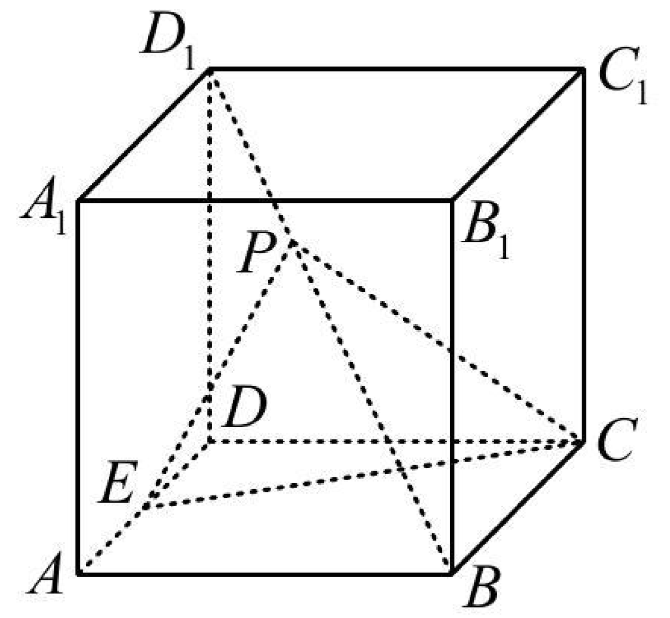
【例5】（多选）如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为棱AD的中点，点P为线段D_1B上的动点，设$D_1P=\lambda D_1B$，则（　　）

（A）当$\lambda=\dfrac{1}{3}$时，$EP//$平面AB_1C

（B）当$\lambda=\dfrac{1}{2}$时，PE的长取得最小值$\sqrt{2}$

（C）$PA+PC$的最小值为$\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

（D）当C_1在平面CEP内时，$\lambda=\dfrac{1}{4}$



解析：观察选项发现 A、B、D 三个选项用几何方法分析不易，而图形又方便建系，故考虑建系. 那线段 D_1B 上的动点 P 的坐标如何写呢？可由 $\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B}$ 将点 P 的坐标用 λ 表示，用向量法来解决问题，

以 D 为原点建立如图 1 所示的空间直角坐标系，则 $D_1(0,0,2)$，$B(2,2,0)$，$E(1,0,0)$，$D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B_1(2,2,2)$，$C(0,2,0)$，由题意，$D_1P=\lambda\overrightarrow{D_1B}$，

所以 $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1P}=\overrightarrow{DD_1}+\lambda\overrightarrow{D_1B}=(0,0,2)+\lambda(2,2,-2)=(2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$，故 $P(2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$，

A 项，当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，$P(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3})$，要判断 A 项是否正确，只需看 $\overrightarrow{EP}$ 与面 AB_1C 的法向量是否垂直，

$\overrightarrow{EP}=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3})$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，设平面 AB_1C 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=2y+2z=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=-2x+2y=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $\begin{cases}y=1\\ z=-1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,1,-1)$ 是平面 AB_1C 的一个法向量，

因为 $\overrightarrow{EP}\cdot\boldsymbol{m}=-\frac{1}{3}\times1+\frac{2}{3}\times1+\frac{4}{3}\times(-1)=-1\neq0$，所以 EP 与平面 AB_1C 不平行，故 A 项错误；

B 项，已有 P，E 的坐标，可用空间两点间的距离公式把 PE 表示成关于 λ 的函数，再分析最值，

$PE=\sqrt{(2\lambda-1)^2+(2\lambda)^2+(2-2\lambda)^2}=\sqrt{12\lambda^2-12\lambda+5}=\sqrt{12(\lambda-\frac{1}{2})^2+2}$，

所以当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，PE 取得最小值 $\sqrt{2}$，故 B 项正确；

C 项，求 $PA+PC$ 的最小值，可以理解成求从 A 到 D_1B 上的点 P，再到点 C 的最短路径，涉及最短路径问题，可考虑将其展开到平面上来看，

如图 1，$AB=BC=2$，$AD_1=CD_1=2\sqrt{2}$，$BD_1=2\sqrt{3}$，将 ΔABD_1 绕 BD_1 旋转至与 ΔBCD_1 在同一平面上，如图 2，当 P 与图中 P_0 重合时，$PA+PC$ 取得最小值，且最小值为 AC，

由对称性，$AC=2AP_0=2AB\cdot\sin\angle ABP_0=2AB\cdot\frac{AD_1}{BD_1}=2\times2\times\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，故 C 项正确；

D 项，C_1 在面 CEP 内等价于 C_1，C，E，P 四点共面，也等价于 $\overrightarrow{EP}$ 是平面 ECC_1 内的向量，故应与该平面的法向量垂直，可由此求 λ，

由图 1 可知 $C_1(0,2,2)$，所以 $\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{CE}=(1,-2,0)$，设平面 ECC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x',y',z')$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=2z'=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=x'-2y'=0\end{cases}$，令 $x'=2$，则 $\begin{cases}y'=1\\ z'=0\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,1,0)$ 是平面 ECC_1 的一个法向量，

又 $\overrightarrow{EP}=(2\lambda-1,2\lambda,2-2\lambda)$，所以 $\overrightarrow{EP}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 即为 $2(2\lambda-1)+2\lambda=0$，解得：$\lambda=\frac{1}{3}$，故 D 项错误.

答案：BC

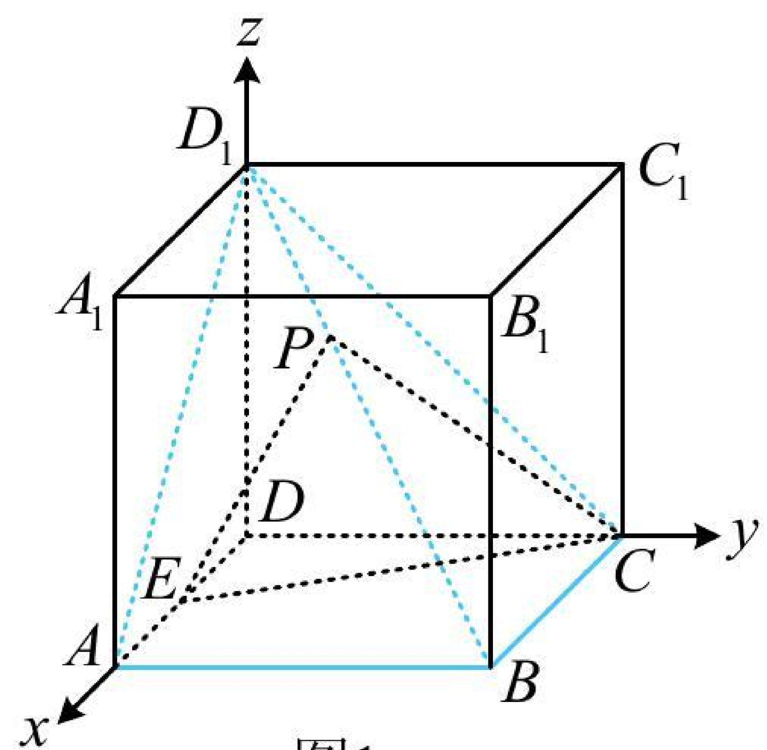


图1

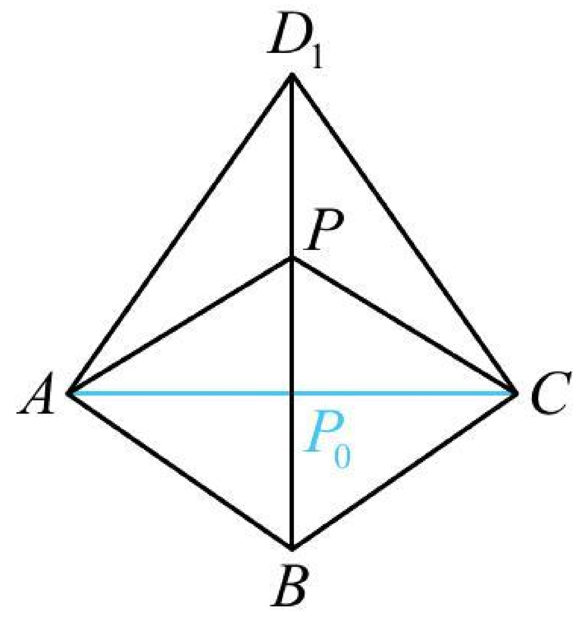


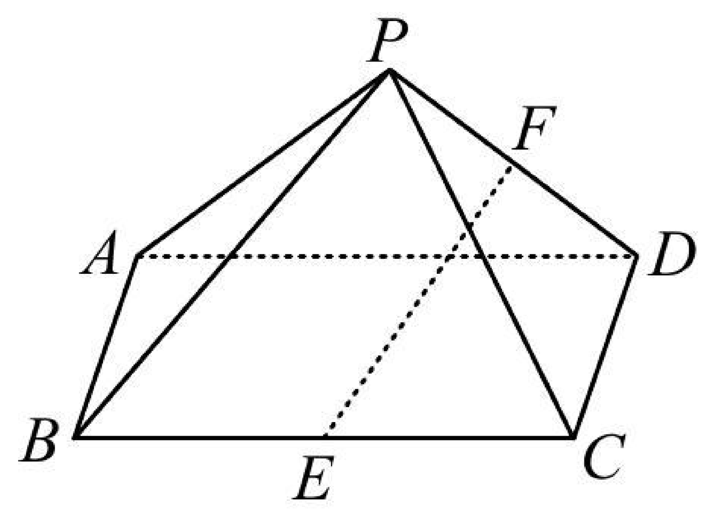
图2

【反思】当点在直线上运动时，可像本题这样由 $\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B}$ 将 P 的坐标用 λ 表示. 对于这种综合多选题，一般优先考虑几何法，若几何法较难，也可建系处理.

强化训练

1.（2023・山西忻州模拟・★★★）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是矩形，$PA=\sqrt{2}AB$，E，F 分别是棱 BC，PD 的中点，则异面直线 EF 与 AB 所成角的余弦值是（　　）

（A）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（B）$\frac{\sqrt{6}}{3}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{6}$　（D）$\frac{\sqrt{6}}{6}$



2.（★★★）已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长与底面边长相等，则 AB_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角的正弦值等于（　　）

（A）$\frac{\sqrt{6}}{4}$　（B）$\frac{\sqrt{10}}{4}$　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.（2023・全国乙卷・★★★）已知 ΔABC 为等腰直角三角形，AB 为斜边，ΔABD 为等边三角形，若二面角 $C-AB-D$ 为 150°，则直线 CD 与平面 ABC 所成角的正切值为（　　）

（A）$\frac{1}{5}$　（B）$\frac{\sqrt{2}}{5}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{5}$　（D）$\frac{2}{5}$

4.（2023 •新高考Ⅱ卷 •★★★）(多选)已知圆锥的顶点为P，底面圆心为O，AB为底面直径，$\angle APB=120^{\circ}$，$PA=2$，点C在底面圆周上，且二面角$P-AC-O$为45°，则（　　）

（A）该圆锥的体积为π

（B）该圆锥的侧面积为$4\sqrt{3}\pi$

（C）$AC=2\sqrt{2}$

（D）ΔPAC的面积为$\sqrt{3}$

5.（2022 • 北京卷 • ★★★）已知正三棱锥$P-ABC$的六条棱长均为 6，S 是ΔABC及其内部的点构成的集合，设集合$T=\{Q\in S\,|\,PQ\le 5\}$，则T表示的区域的面积为（　　）

（A）$\frac{3\pi}{4}$　（B）π　（C）2π　（D）3π

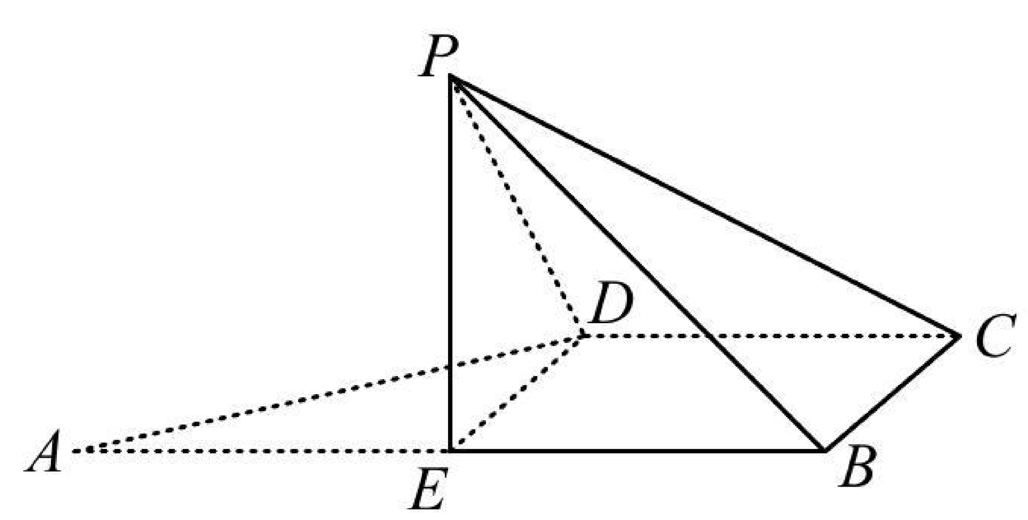
6.（2022 •福建模拟 •★★★★）(多选)如图，直角梯形$ABCD$中，$AB\,//\,CD$，$AB\perp BC$，$BC=CD=\frac{1}{2}AB=1$，E为AB中点，以DE为折痕把ΔADE折起，使点A到达点P的位置，使$PC=\sqrt{3}$，则（　　）

（A）平面$PED\perp$平面PCD

（B）$PC\perp BD$

（C）二面角$P-DC-B$的大小为60°

（D）PC与平面PED所成角为45°



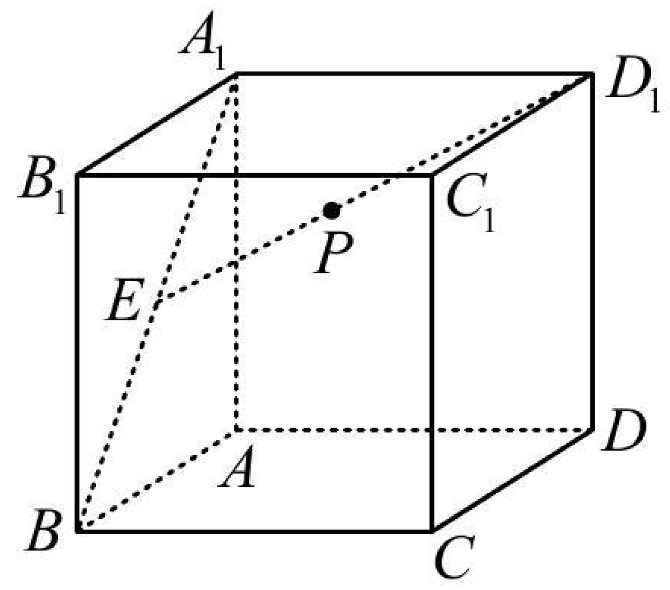
7.（2023 • 云南模拟 • ★★★★）（多选）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 E 是 A_1B 的中点，点 P 是线段 D_1E 上的动点，则下列说法正确的是（　　）

（A） $A_1C\perp D_1P$

（B）CP 的最小值为 $\dfrac{4}{3}$

（C）三棱锥 $P-BC_1D$ 的体积为 $\dfrac{4}{3}$

（D）存在点 P，使直线 CP 与平面 $ABCD$ 所成角为 60°



8.（2022 • 山东模拟 • ★★★★）（多选）在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB\perp BC$，P 在底面 ABC 上的投影是 AC 中点 D， $DP=DC=1$，则下列结论中正确的是（　　）

（A） $PA=PB=PC$

（B） $\angle PAB$ 的取值范围为 $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$

（C）若三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的表面上，则球 O 的表面积为 2π

（D）若 $AB=BC$，E 是棱 PC 上的一个动点，则 $DE+BE$ 的最小值是 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$